ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,\infty) \to [1,\infty)$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$
ΝΔΟ αυτή είναι συστολή και να εξεταστεί αν μπορεί (για αυτήν) να εφαρμοστεί η αρχή της συστολής

ΛΥΣΗ

Για τυχόντα x,y εν $[1,\infty)$, $\exists z\in(x,y)$ με $x<y$

$|f(x)-f(y)| = f'(z)|x-y| \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{z}}|x-y|$ ①

Ενώ $\frac{1}{2\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}$, $z\in(1,\infty)$ ②

Άρα, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ συνεπώς η f συστολή

Για να ισχύει η Αρχή της συστολής πρέπει ο χώρος $([1,\infty), |\ |)$ να είναι πλήρης και λόγω ότι $[1,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ με $\mathbb{R}$ πλήρης και $[1,\infty)$ κλειστό τότε ο $([1,\infty),|\ |)$ είναι πλήρης και το σ.τ. σημείο είναι

$f(\alpha)=\alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha}=\alpha \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0 & \text{(Απορρίπτεται γιατί α>=1)}\\ \boxed{\alpha=1}\end{cases}$

Άσκηση 2

Έστω (E,ρ) πλήρης μχ, ενώ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασικές ακολουθίες εν E. ΝΔΟ $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_\nu \Leftrightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,\beta_\nu)=0$

ΛΥΣΗ

$(\Rightarrow)$ Έστω (E,ρ) πλήρης και $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu, \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_\nu) = \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,\beta_\nu)=0$

(λόγω ότι ρ συνεχής)

$(\Leftarrow)$ Έστω $\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,\beta_\nu)=0$

Αφού, $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασικές και ο (E,ρ) πλήρης τότε οι $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες στον E

$\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_\nu=\beta$ εν E και $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = a$ εν E

$\rho(a,\beta)=\rho(\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu, \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_\nu) \overset{\rho\text{-συνεχ}}{=\!=} \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,\beta_\nu)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 3η

ΝΔΟ η εξίσωση $2x = \sigma\upsilon\nu x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ (μέσω της αρχής συστολής)

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

Είναι καλώς ορισμένη;

Πρέπει $f : \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

Βλέπουμε ότι:

$-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

Ενώ, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x - 1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}$

Άρα, από Θ. συστολής

x, y εν $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $x < y$. Τότε $\exists\, z \in (x,y)$:

$|f(x) - f(y)| = |f'(z)|\,|x-y| = \left|-\frac{1}{2}\cdot \eta\mu z\right| \cdot |x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

Άσκηση 4η

Έστω $D \subseteq E$ μ.χ. Το D πυκνό εν E και τ.ω. κάθε βασική ακολουθία εν D να συγκλίνει στο E.

ΝΔΟ ο E πλήρης μ.χ.

ΛΥΣΗ

D πυκνό εν $E \Longrightarrow \overline{D} = E$

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία εν E

Τότε, $a_1, \dots, a_\nu \in E = \overline{D}$

Δηλαδή: $\left\{\begin{array}{l} B(a_1, 1) \cap D \neq \phi \\ B(a_2, \frac{1}{2}) \cap D \neq \phi \\ \vdots \\ B(a_\nu, \frac{1}{\nu}) \cap D \neq \phi \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} (\exists x_1) : x_1 \in B(a_1, 1) \cap D \\ (\exists x_2) : x_2 \in B(a_2, \frac{1}{2}) \cap D \\ \vdots \\ (\exists x_\nu) : x_\nu \in B(a_\nu, \frac{1}{\nu}) \cap D \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} : x_\nu \in B(a_\nu, \frac{1}{\nu}) \cap D \Longrightarrow \rho(x_\nu, a_\nu) < \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική από $(*)$

Από υπόθεση $\exists \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = \ell \in E$

$\rho(a_\nu, \ell) \leq \rho(a_\nu, x_\nu) + \rho(x_\nu, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\nu > \max\{n_1, n_2\}$.

Διότι, για ε τυχόν ώστε $\varepsilon > 0$

$(\exists n_1)(\forall \nu > n_1) : \frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \rho(a_\nu, x_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\exists n_2)(\forall \nu > n_2) : \rho(x_\nu, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell$ άρα ο E πλήρης μ.χ.

Απόδειξη της (*)

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ώστε $\rho(x_\nu, a_\nu) < \frac{1}{\nu}$

ΝΔΟ η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία.

① $\rho(x_\nu, x_\mu) \le \rho(x_\nu, a_\nu) + \rho(a_\nu, a_\mu) + \rho(a_\mu, x_\mu) < \frac{1}{\nu} + \rho(a_\nu, a_\mu) + \frac{1}{\mu}$

Για τυχόν $\varepsilon > 0$

$(\exists n_1 > 0)(\forall \nu > n_1) : \frac{1}{\nu} < \varepsilon/3$

$(\exists n_2 > 0)(\forall \mu > n_2)(\forall \nu > n_2) : \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon/3$

Παίρνοντας ως $\mu > \max\{n_1, n_2\}$ και $\nu > \max\{n_1, n_2\}$

άρα, από ① $\rightarrow \rho(x_\nu, x_\mu) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική

Άσκηση 5η

Έστω $S = [\frac{2}{3}, \infty)$ με $f : S \to \mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$.

ΝΔΟ $f(S) \subseteq S$. (Να γίνει εφαρμογή της Αρχής συστολής)

ΛΥΣΗ

$\frac{2x+6}{3x+2} = y \Rightarrow x = \frac{2y-6}{2-3y}$ άρα, $f : S \to S$, S πλήρης

$x < y$, x, y εν S δηλ. $x \geq \frac{2}{3}$ $\wedge$ $y \geq \frac{2}{3}$

$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| = \left|\frac{-14}{(3z+2)^2}\right| \cdot |x-y| \le$

$\le \frac{14}{(3\frac{2}{3}+2)^2} \cdot |x-y| = \frac{7}{8}|x-y|$

Άρα, το μοναδικό σημείο θα έρχεται απ' τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x \Rightarrow x = \sqrt{2}$